**1ère Maths CS3 18 déc. 2023 45 min Calculatrice en mode Exam Thiaude P.**

NOM :

**Exercice 1 [4 pts]**

Pour tout réel $x$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$.

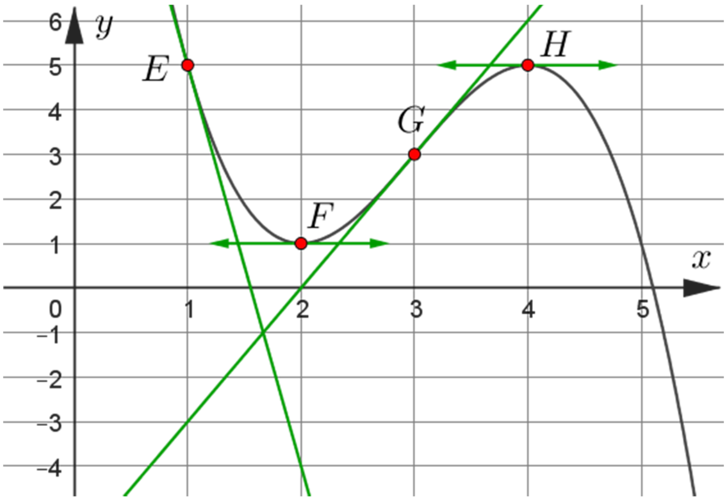
1. Démontrer que, pour tout réel $h \neq 0$ :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 2h + 3$$

2. En déduire $f'(2)$.

**Exercice 2 [3 pts]**

On donne $\mathcal{C}_f$ où $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes en quatre points $E$, $F$, $G$ et $H$ de $\mathcal{C}_f$ à coordonnées entières :




Par lecture graphique, en justifiant très brièvement et en laissant les constructions utilisées dans votre raisonnement :

1. Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer $f(3)$ et $f'(3)$.
3. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

**Exercice 3 [6 pts]**

Calculer $f'(x)$ pour chacune des fonctions $f$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ :

**1.** $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)^6$ **2.** $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2+4}$ **3.** $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+10}$

**Exercice 4 [7 pts]**

Pour tout réel $x$, on pose : $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 7$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal du plan.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de $f$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente $T$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A$ d'abscisse 4.
4. Déterminer l'abscisse de $B \in \mathcal{C}_f$, $B \neq A$, en lequel la tangente est parallèle à $T$.

**Corrigé**

**Exercice 1 [4 pts]**

$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

**1. Démontrons que, pour tout réel $h \neq 0$, on a :**

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 2h + 3$$

On a :

$$f(2) = 2(2)^2 - 5(2) + 1 = 2 \times 4 - 10 + 1 = 8 - 10 + 1 = -1$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}$ :

$$f(2+h) = 2(2+h)^2 - 5(2+h) + 1 = 2(4 + 4h + h^2) - 10 - 5h + 1$$
$$= 8 + 8h + 2h^2 - 10 - 5h + 1 = 2h^2 + 3h - 1$$

donc,pour tout $h \neq 0$ :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{2h^2 + 3h - 1 - (-1)}{h} = \frac{2h^2 + 3h}{h} = \frac{h(2h+3)}{h} = 2h + 3$$

Conclusion : $\forall h \neq 0, \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = 2h + 3$

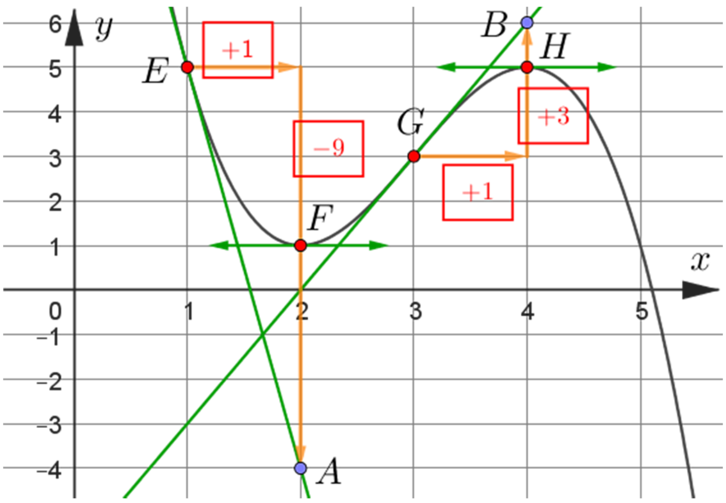
**2. En déduire $f'(2)$**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (2h + 3) = 3$$

Conclusion : $f'(2) = 3$.

Vérification $\quad f'(x) = 2 \times 2x - 5 = 4x - 5$ donc $f'(2) = 4(2) - 5 = 8 - 5 = 3$

**Exercice 2**




**1. Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.**

$$f(1) = y_E = \mathbf{5}$$

$$f'(1) = coeff.directeur\ de\ la\ tangente\ en\ E = \frac{-9}{+1} = \mathbf{-9}$$

$$f'(1) = coeff.directeur\ de\ la\ tangente\ en\ E = \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} = \frac{-4-5}{2-1} = \frac{-9}{1} = -9$$

**2. Déterminer $f(3)$ et $f'(3)$.**

$$f(3) = y_G = \mathbf{3}$$

$$f'(3) = coeff.directeur\ de\ la\ tangente\ en\ G = \frac{+3}{+1} = \mathbf{3}$$

$$f'(3) = coeff.directeur\ de\ la\ tangente\ en\ G = \frac{y_B - y_G}{x_B - x_G} = \frac{6-3}{4-3} = \frac{3}{1} = 3$$

**3. Tableau de signes de $f'(x)$**

Le signe de $f'(x)$ peut être obtenu à partir du sens de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Exercice 3**

**1.** $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)^6$

rappel : $(u^6)' = 6u^5 \times u'$

$u(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$

$u'(x) = \frac{1}{4} \times 2x - 1 = \frac{1}{2}x - 1$

$f'(x) = 6 \times \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)^5 \times \left(\frac{6}{2}x - 6\right)$

$\boldsymbol{f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)^5 (3x - 6)}$

**2.** $f(x) = \frac{2x - 1}{3x^2 + 4}$

rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$u(x) = 2x - 1 \qquad u'(x) = 2$

$v(x) = 3x^2 + 4 \qquad v'(x) = 3 \times 2x + 0 = 6x$

$f'(x) = \frac{2(3x^2 + 4) - 6x(2x - 1)}{(3x^2 + 4)^2}$

$f'(x) = \frac{6x^2 + 8 - 12x^2 + 6x}{(3x^2 + 4)^2}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-6x^2 + 6x + 8}{(3x^2 + 4)^2}}$

**3.** $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 10}}$

rappel : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

$v(x) = x^2 + 3x + 10$

$f'(x) = \frac{-(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 10)^2}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-2x - 3}{(x^2 + 3x + 10)^2}}$

**Exercice 4** **[6 pt]**

$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 7.}$

**1. Calculer $f'(x)$.**

$f'(x) = 3x^2 - 5 \times 2x + 3$

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 10x + 3}$

**2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de $f$.**

$3x^2 - 10x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = -10$ et $c = 3$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(3)(3) = 100 - 36 = 64$.
$\Delta > 0$ donc $3x^2 - 10x + 3$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+10 - \sqrt{64}}{2(3)} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+10 + \sqrt{64}}{2(3)} = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de $a$ à l'extérieur des racines ».

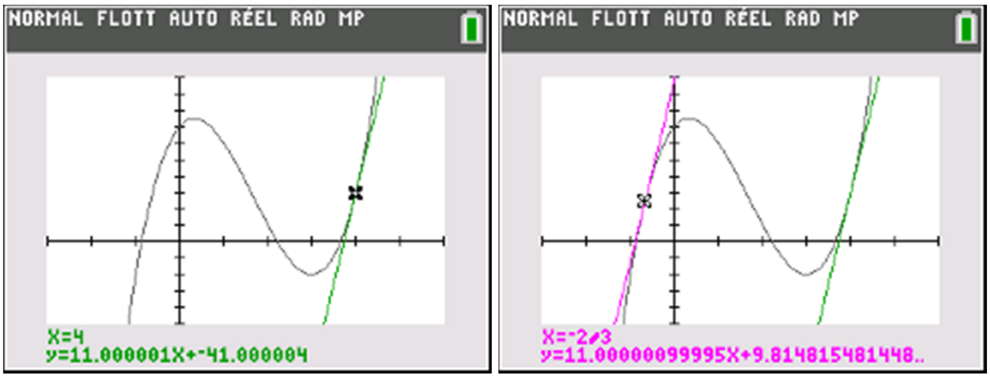
| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Sens de variation de $f$ | | $\nearrow$ | $\frac{202}{27}$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | |

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 7 = \frac{202}{27}$$
$$f(3) = (3)^3 - 5(3)^2 + 3(3) + 7 = -2$$

3. **Déterminer l'équation réduite de la tangente $\boldsymbol{T}$ à $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ au point $\boldsymbol{A}$ d'abscisse $\boldsymbol{4}$.**
   Remarquons d'abord que : $f(4) = 3$ et $f'(4) = 3(4)^2 - 10(4) + 3 = 3 \times 16 - 40 + 3 = 11$.
   La tangente $T$ admet pour équation :
   $$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$
   $$y = 11(x-4) + 3$$
   $$y = 11x - 44 + 3$$
   $$y = 11x - 41$$
   Conclusion :
   $T$ admet pour équation réduite : $\boldsymbol{y = 11x - 41}$.

4. **Abscisse de $\boldsymbol{B \in \mathcal{C}_f}$, $\boldsymbol{B \neq A}$, en lequel la tangente est parallèle à $\boldsymbol{T}$**
   Deux droites (non verticales) sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur.
   Or, $T$ admet pour coefficient directeur $11$, donc il s'agit de trouver $x \neq x_A$ tel que $f'(x) = 11$.
   Cette équation s'écrit :
   $$3x^2 - 10x + 3 = 11$$
   $$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 - 11 = 0$$
   $$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x - 8 = 0$$
   $$\Leftrightarrow (x-4)(3x+2) = 0$$
   $$\Leftrightarrow x = 4 \ ou \ x = -\frac{2}{3}$$
   Or $x_A = 4$ donc $4$ est refusé, par conséquent $x_B = -\frac{2}{3}$.

   <u>**Vérification**</u>

   <u>Complément</u>
   On obtiendrait, en calculant $y_B = f(x_B)$ :
   $$B\left(-\frac{2}{3} ; \frac{67}{27}\right)$$